ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

48

«Освободи кольцо»

ISSN 2225-1782
00048
9 772225 178772

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 48, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Уважаемые читатели! Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко
Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 331-94-27.
Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00—21.00)
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»
РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 39 900 бел. руб., 990 тенге
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: ООО «Компания Юнивест Маркетинг», 08500, Украина, Киевская область, г. Фастов, ул. Полиграфическая, 10
ТИРАЖ: 68 000 экз.
Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.
Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.
Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 03.12.2013

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Инвариантность относительно проекции Существует представление, согласно которому геометрия Евклида — это реальная геометрия пространства, в котором мы живем. Это наводит на мысль, что другие геометрии, например проективная, искусственные. Но это не так. Любой может увидеть две прямые, которые пересекаются, но никто никогда не видел две бесконечные параллельные прямые, о существовании которых категорически утверждается в геометрии Евклида.

Блистательные умы

Создатель проективной геометрии Жан Виктор Понселе уделял одинаковое внимание развитию прикладной механики и теории машин и механизмов. Основным вкладом Понселе в науку стал синтез математики, теоретических исследований и практических результатов. Творческие способности Понселе также проявились и в инженерном деле. В 1826 году он предложил улучшенный проект турбины, применив знания математики в гидродинамике и создав колеса, которые должны были вращаться под водой.

Математика на каждый день

Японские математические таблички Сангаку — геометрические чертежи, выполненные на деревянных табличках, — представляют собой проявление высочайшего культурного уровня, которого может достичь занимательная математика. Весьма вероятно, что некоторые учителя использовали эти таблички для преподавания математики в школах, но все указывает на то, что эти задачи носили преимущественно занимательный характер. Их решали крестьяне, торговцы и самураи только ради удовольствия.

Математические задачки

Задачи на шахматной доске Сегодня в меню английского головоломщика Генри Э. Дьюдени — задачи на шахматной доске. Некоторые из них покажутся вам знакомыми, о других, возможно, вы услышите впервые. После «основного блюда» — четырех задачек, из которых вы узнаете, что бывают слоны защищенные и незащищенные, — на «десерт» вам подадут задачу о «перенаселенной» шахматной доске, на которой нужно расставить 51 фигуру.

Головоломки

«Освободи кольцо» На первый взгляд, эта головоломка содержит сразу несколько невозможных ситуаций: шары не проходят в отверстия, а диски не пролезают в кольцо. Однако если выполнить правильную последовательность действий, произойдет чудо. Обязательно запомните, как располагались элементы головоломки до того, как начнете ее собирать.

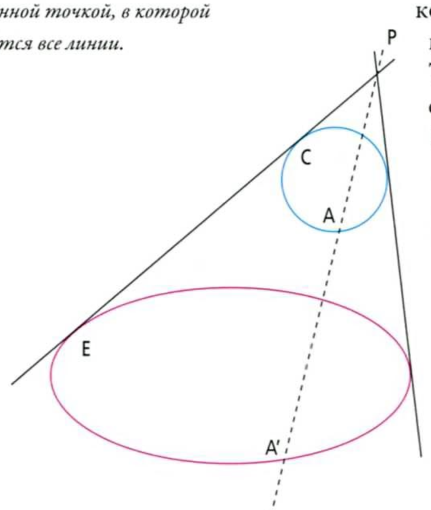
По словам Феликса Клейна, проективная геометрия, созданная французским математиком Жаном Виктором Понселе, открыла новые области математики, проложив «царскую дорогу» в геометрии.

Проективная геометрия

Инвариантность относительно проекции

◄ *В картине «Благовещение», датируемой 1450 годом и приписываемой мастеру Барберини, используется перспектива с единственной точкой схода — бесконечно удаленной точкой, в которой сходятся все линии.*

В общих чертах проективную геометрию можно определить как раздел геометрии, в котором изучаются свойства геометрических фигур, инвариантные относительно центральной проекции. Иными словами, две геометрические фигуры считаются эквивалентными, если каждую из них можно получить из другой с помощью проекции. Например, из точки P можно спроецировать точки окружности C в точки эллипса E.

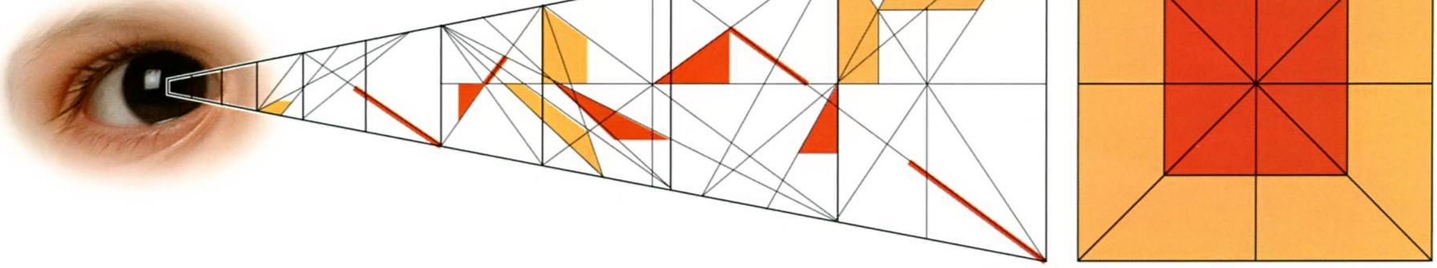


Для любой точки окружности A достаточно провести прямую, проходящую через P и A, и найти пересечение этой прямой с эллипсом, чтобы определить точку A′, соответствующую исходной точке A. Верно и обратное: для любой точки эллипса A′ соответствующей ей точкой A будет точка пересечения прямой PA′ с окружностью. Так строится проекция фигуры с центром проекции в точке P. В этом смысле окружность и эллипс проективно эквивалентны.

Отправная точка

Иногда существует ошибочное представление о творчестве, научном или художественном, согласно которому можно создать нечто из ничего и этой способностью якобы обладают лишь боги. Творчество предполагает некое видоизменение уже существующих объектов, которые наводят на мысли о новых художественных формах или научных понятиях. Можно считать доказанным, что великие произведения были созданы в момент счастливого озарения, а их создатели не были лишены смелости и оригинальности. Проективная геометрия — яркий пример результата подобного творчества. Отправной точкой для французского математика Жана Виктора Понселе (1788–1867) стала геометрическая теорема, открытая французским математиком Жераром Дезаргом и опубликованная в 1639 году, которая известна в математике как теорема Дезарга.

▼ *Примером использования проективной геометрии может служить это устройство. Когда наблюдатель смотрит внутрь пирамиды, в которой беспорядочно расположены геометрические фигуры, он видит правильную фигуру (справа) благодаря тому, что фигуры проецируются на основание пирамиды.*

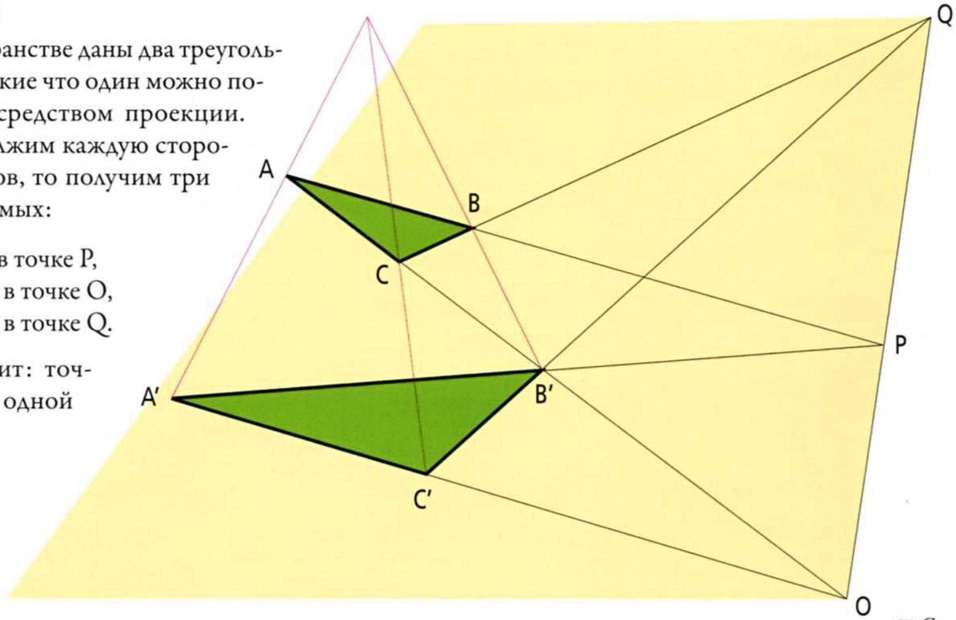


Теорема Дезарга

Допустим, что в пространстве даны два треугольника ABC и A′B′C′, такие что один можно получить из другого посредством проекции. Если теперь мы продолжим каждую сторону обоих треугольников, то получим три точки пересечения прямых:

AB и A′B′ пересекутся в точке P,
AC и A′C′ пересекутся в точке O,
BC и B′C′ пересекутся в точке Q.

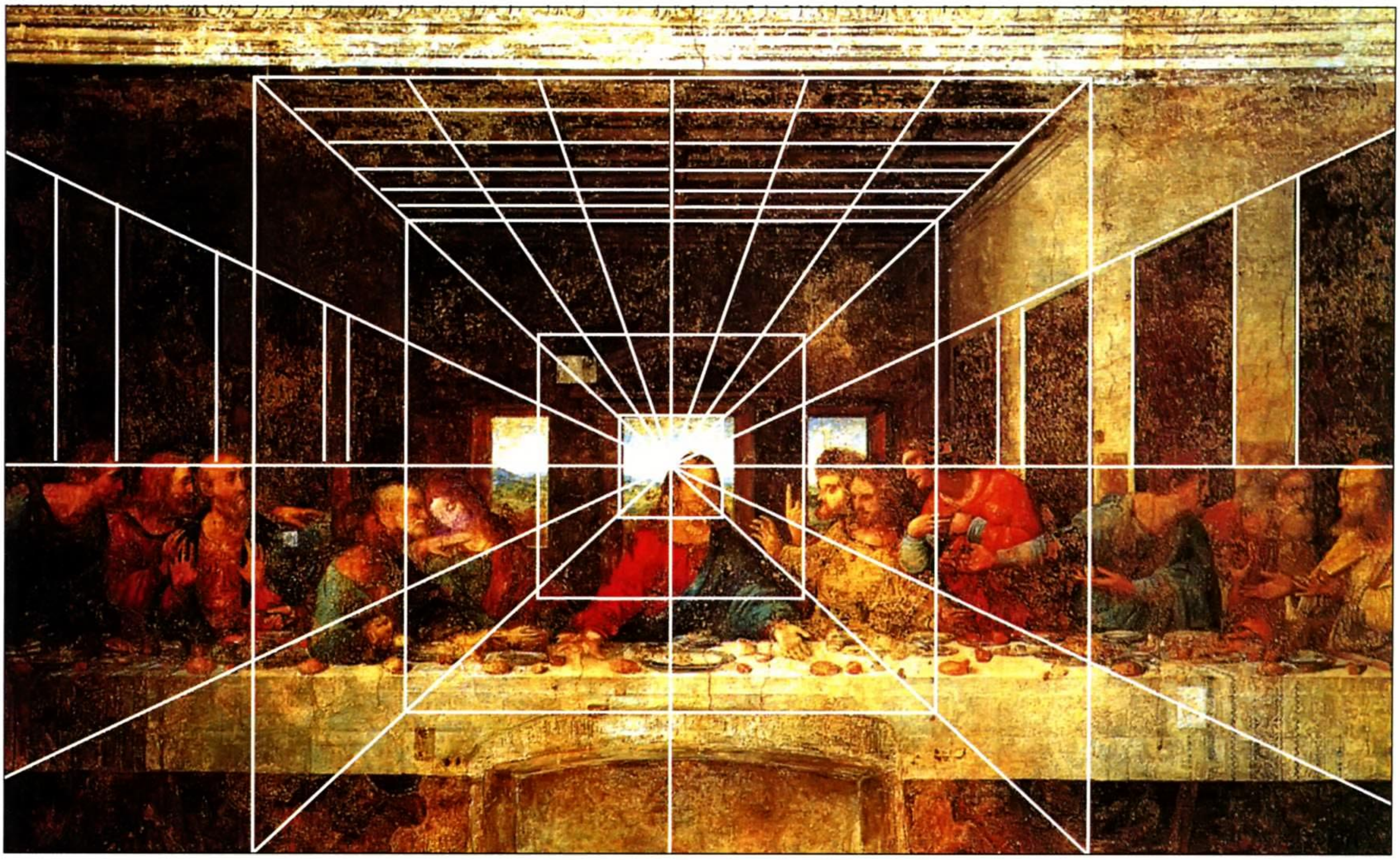
Теорема Дезарга гласит: точки O, P и Q лежат на одной прямой.



Бесконечно удаленная точка

Что произойдет, если две стороны треугольников, например BC и B′C′, параллельны? Тогда эти прямые не пересекутся, и мы получим всего две точки, O и P, которые определят прямую, проходящую через них. Понселе, вместо того чтобы рассмотреть эту ситуацию как частный случай теоремы Дезарга, изменил структуру евклидова пространства и дополнил прямую OP бесконечно удаленной точкой. Это было очень смелым решением. Понселе постановил, что каждая прямая содержит идеальную, то есть бесконечно удаленную точку. Тем самым на смену евклидовой плоскости пришла новая, проективная плоскость, на которой две прямые всегда пересекаются: если эти прямые параллельны, они пересекутся в бесконечно удаленной точке. Почти сразу стало понятно, что благодаря открытию Понселе для теоремы Дезарга и других похожих теорем можно привести более простые формулировки и доказательства, чем те, что были получены в геометрии Евклида.

▼ *Сетка линий на фреске «Тайная вечеря» гениального Леонардо да Винчи, написанной на стене монастыря Санта-Мария делле Грацие в Милане в 1495–1497 годах, позволяет подробно рассмотреть, как великий мастер использовал перспективу для создания столь впечатляющей композиции.*

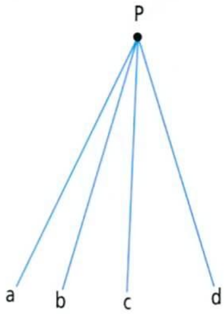


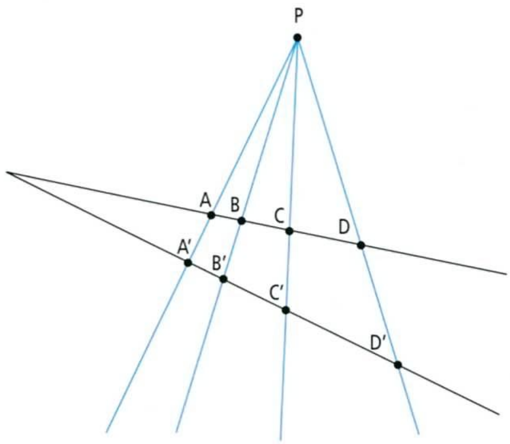
Гомологичные фигуры

Будем называть рядом точек совокупность точек, расположенных на одной прямой.

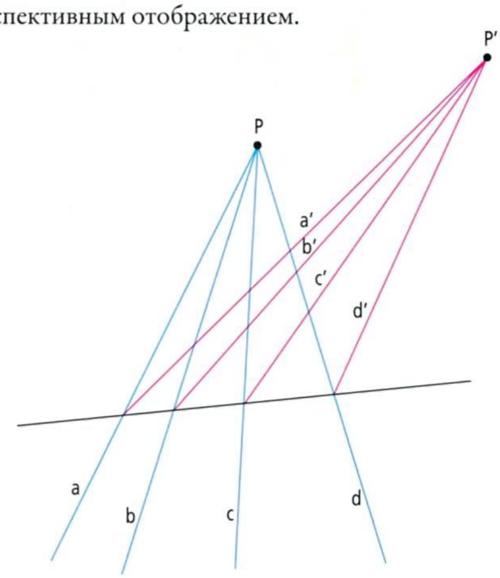
Пучком прямых будем называть совокупность прямых, проходящих через одну точку.

При пересечении одного пучка прямых другим образуется ряд точек, который называется сечением пучка.



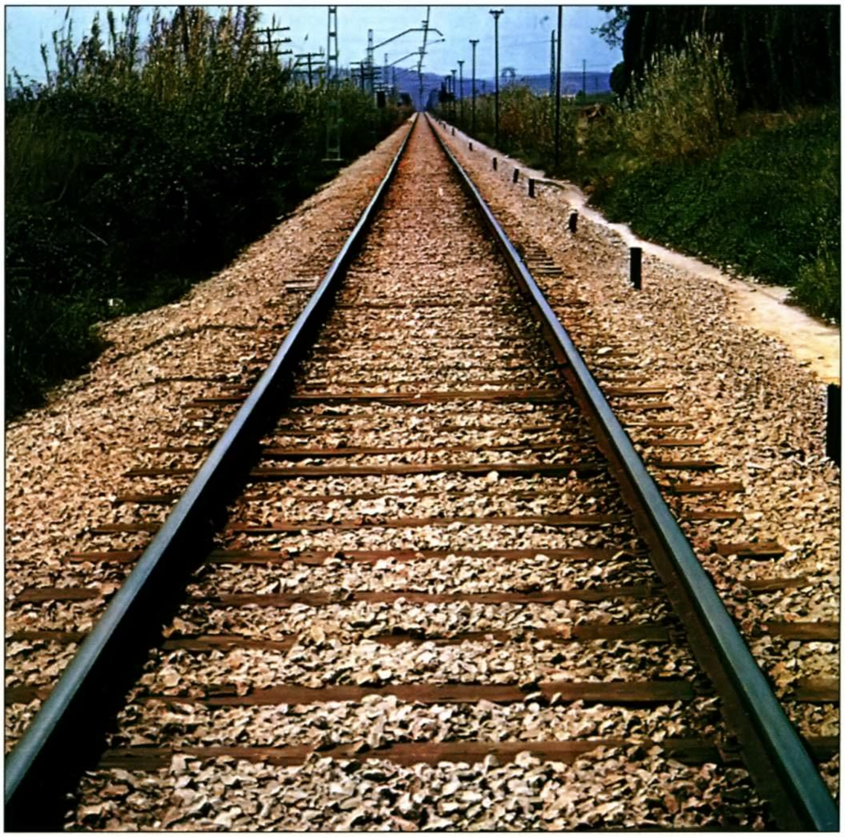


Если на данном пучке прямых определены два разных сечения, имеем два множества точек, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие. Это соответствие называют перспективным отображением.



Произведение перспективных отображений (последовательность перспективных отображений, выполняемых последовательно) называется проективным отображением. Проективное отображение — основное преобразование проективной геометрии.

С помощью проективных отображений, то есть с помощью последовательности проекций и сечений, можно получить ряд фигур, гомологичных исходной фигуре. Изучение этих фигур позволяет определить, какие из их геометрических свойств инвариантны, то есть не изменяются при подобных преобразованиях. Таким способом можно получить намного более простую фигуру, чем исходная, на которой будет проще продемонстрировать какое-то конкретное свойство, которым обладает исходная фигура.



▲ *Абстрактное математическое понятие предела в реальном мире, в котором мы живем, соответствует ряду связанных между собой явлений и в некотором роде бесконечности. Поэтому мы говорим, что кажущимся пределом рельсов железной дороги, в действительности параллельных, является бесконечно удаленная точка.*

Более реалистичная геометрия

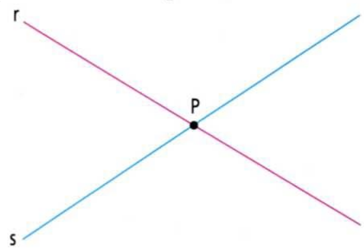
Существует распространенное представление, согласно которому геометрия Евклида — это реальная геометрия пространства, в котором мы живем. Это наводит на мысль, что другие геометрии, например проективная, искусственны и при их использовании требуется немалая доля воображения и даже фантазии. Тем не менее, это не так. Любой может увидеть две прямые, которые пересекаются, но никто никогда не видел две бесконечные параллельные прямые, о существовании которых категорически утверждается в геометрии Евклида. Более реалистичное представление о двух прямых можно получить, если взглянуть на уходящие вдаль рельсы железной дороги. Мы видим, что параллельные рельсы сходятся в одной точке на горизонте.

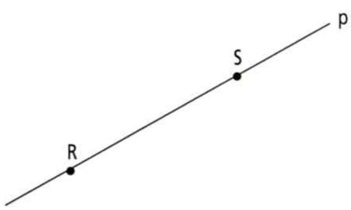
Принцип двойственности

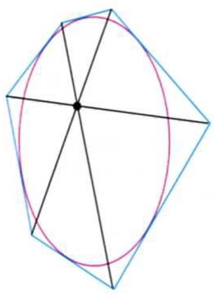
Одно из самых удивительных утверждений проективной геометрии — так называемый принцип двойственности. Согласно этому принципу, например, на плоскости законы проективной геометрии продолжают выполняться, а теоремы остаются верными, если мы поменяем местами понятия «точка» и «прямая». Логично, что в этом случае также потребуется заменить понятия, описывающие относительное положение точек и прямых, например, «пересекать» и «соединять» или «проходить через» и «находиться на». Например, если высказывание гласит: «Две прямые всегда пересекаются в одной точке», двойственное ему высказывание звучит так: «Две точки всегда располагаются на одной прямой».

Магия принципа двойственности заключается в том, что доказательство любого утверждения автоматически означает доказательство двойственного ему.

Приведем пример двойственных высказываний: «Прямые *r* и *s* пересекаются в точке P». «Через точки R и S проходит единственная прямая P».



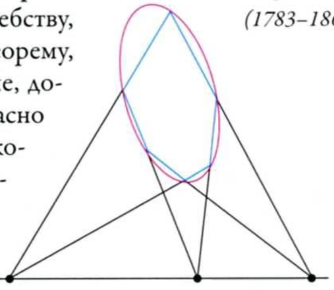




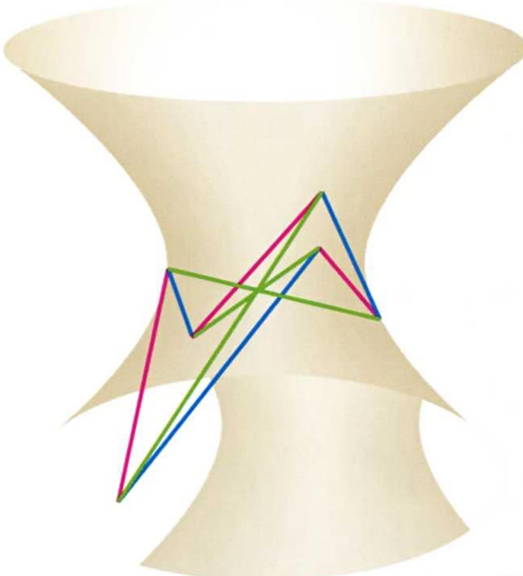
Вся сила принципа двойственности проявилась, когда с его помощью Шарль Жюльен Брианшон (1783–1864) в 1806 году доказал следующую теорему и опубликовал ее доказательство в журнале Политехнической школы:

Для любого шестиугольника, вписанного в коническое сечение, прямые, соединяющие его противоположные вершины, сходятся в одной точке.

Брианшон не только доказал эту теорему — он первым сформулировал ее. Почему эта теорема стала решающим шагом в развитии проективной геометрии и в особенности двойственного метода, созданного Понселе? Причина в том, что, словно по волшебству, Брианшон сформулировал теорему, двойственную старой теореме, доказанной еще Паскалем, согласно которой для произвольного конического сечения и вписанного в него шестиугольника три точки, полученные продолжением противоположных



▲ *Эта картина под названием «Точка Брианшона» создана художником и математиком Б. Сэйлером в знак уважения к великому французскому математику Шарлю Жюльену Брианшону (1783–1864).*



◄ *Теорема Брианшона также гласит, что в шестиугольнике, построенном на гиперболоиде (на рисунке три стороны шестиугольника выделены красным цветом, еще три — синим), диагонали (выделены зеленым) пересекаются в одной точке.*

сторон шестиугольника, лежат на одной прямой.

Заметьте, как путем простой замены терминов «точки» и «прямые», а также свойств «пересекаться в точке» и «лежать на одной прямой» одна теорема становится двойственной другой.

Существуют геометрические фигуры, двойственные самим себе, например треугольник. Если мы рассмотрим треугольник с точки зрения геометрии, то увидим, что он представляет собой три точки, не лежащие на одной прямой (три непересекающиеся прямые) и расположенные так, что любые две точки лежат на одной прямой (любые две прямые пересекаются в вершине треугольника). Как следствие, при построении фигуры, двойственной треугольнику, мы вновь получим исходный треугольник.

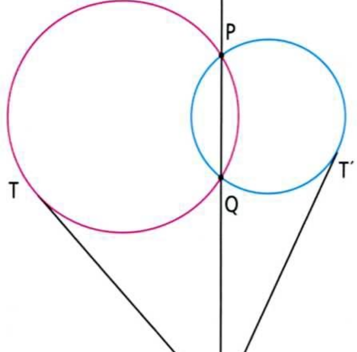
Двойственными самим себе могут быть не только геометрические фигуры, но и некоторые высказывания. Это означает, что если применить к таким высказываниям принцип двойственности, то результатом будут высказывания, эквивалентные исходным. Пример высказывания, двойственного самому себе, — теорема Дезарга, о которой мы рассказали выше.

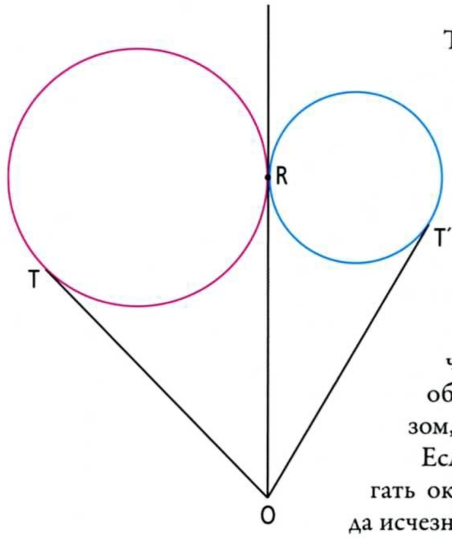
▲ *Великий голландский художник Мауриц Корнелис Эшер (1898–1972) использовал принципы проективной геометрии для создания своих знаменитых картин, на которых изображены невозможные фигуры.*

Стратегия Понселе

Понселе создал проективную геометрию на основе трех базовых элементов: понятия гомологичных фигур, принципа двойственности и принципа непрерывности. О первых двух элементах мы уже в общих чертах рассказали. Принцип непрерывности в свое время породил больше всего противоречий и вызвал мощное противодействие со стороны геометров, отчасти потому, что это была достаточно смелая идея, однако не подкрепленная необходимыми математическими методами. Его формулировка была приведена в первом издании труда Понселе о проективной геометрии. Дословно она звучит так: «Если некая фигура получена из другой посредством непрерывного преобразования и последняя является столь же общей, что и первая, то любое свойство первой фигуры мгновенно выполняется для второй». Это означает, что если мы будем, например, последовательно уменьшать одну из сторон квадрата, пока ее концы не совпадут, так что в результате образуется треугольник, то некоторые свойства квадрата будут сохранены в полученном треугольнике тогда и только тогда, когда мы найдем адекватный способ выразить эти свойства. Однако в некоторых ситуациях подобные непрерывные преобразования вели к исчезновению какого-либо важного геометрического элемента. Тогда Понселе постановил, что такие элементы следует отнести к мнимым и расположить на бесконечности. В качестве примера он привел две пересекающиеся окружности и одно из свойств общей хорды этих окружностей.

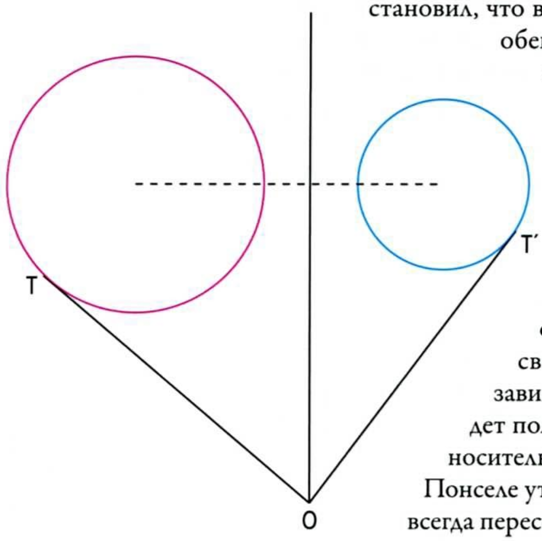
Допустим, что даны две окружности, которые пересекаются в точках P и Q. Пусть из точки O, лежащей вне окружностей, проведена хорда, общая для обеих окружностей. Эта хорда обладает следующим свойством: касательные, проведенные к обеим окружностям из любой точки хорды, имеют одинаковую длину: OT = OT′. Геометрическое место точек, обладающее этим свойством, называется радикальной осью двух окружностей и является прямой, определяющей хорду PQ.





Теперь предположим, что мы постепенно раздвигаем окружности, пока они не станут касаться друг друга. Точки P и Q превратятся в одну точку R — точку касания окружностей. Отмеченное нами свойство сохранится, так как радикальная ось двух окружностей в этом случае будет определяться как их общая касательная. Таким образом, OT = OR = OT′.

Если мы будем и дальше раздвигать окружности, то их общая хорда исчезнет. Тем не менее, радикальную ось двух окружностей можно определить и в этом случае. Она будет проходить по прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему центры окружностей, так что OT = OT′. Понселе постановил, что в этом случае общая хорда обеих окружностей (их радикальная ось) по-прежнему существует. Точки пересечения окружностей (обозначим их I и J) являются мнимыми и расположены на бесконечно удаленной прямой. Таким образом, описанное нами свойство сохраняется вне зависимости от того, каким будет положение окружностей относительно друг друга. Более того, Понселе утверждал, что окружности всегда пересекаются в двух точках.



▲ *Немецкому математику-самоучке Якобу Штейнеру (1796–1863) удалось внести важный вклад в начертательную геометрию исключительно при помощи синтетических методов.*

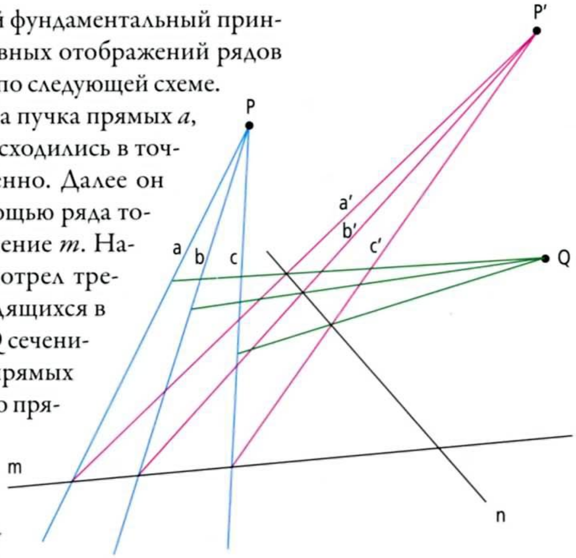
Синтетическая геометрия

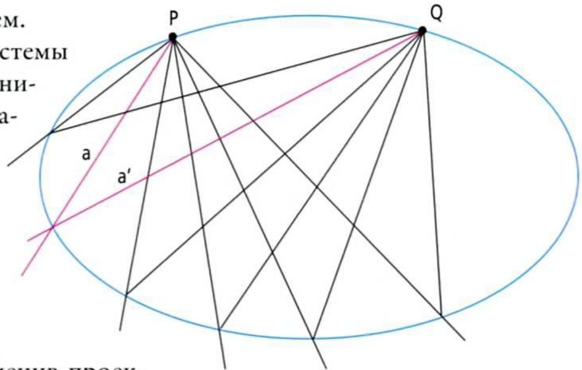
Геометрия, в которой используются только чисто геометрические методы и не применяются, например, алгебра и анализ, называется синтетической геометрией. Синтетическая геометрия — это в некотором роде интуитивная геометрия, которую преподают в младших классах. Вообще говоря, она наиболее сложна. По словам ее многочисленных сторонников, синтетическая геометрия намного лучше других наук подходит для развития так называемой геометрической интуиции. При создании проективной геометрии Гаспар Монж не раз использовал алгебру для обоснования полученных результатов, особенно тех, что касались теории непрерывности.

Еще один великий математик, имеющий отношение к проективной геометрии, — немецкий ученый Якоб Штейнер (1796–1863), который совершил несколько очень важных открытий с помощью чисто синтетических методов.

Штейнер создал свой фундаментальный принцип на основе проективных отображений рядов точек и пучков прямых по следующей схеме.

Он взял за основу два пучка прямых a, b, c и a', b', c', которые сходились в точках P и P′ соответственно. Далее он связал оба пучка с помощью ряда точек, определяющих сечение m. Наконец, Штейнер рассмотрел третий пучок прямых (сходящихся в точке Q) и связал P′ и Q сечением n. Имеем два пучка прямых P и Q, связанных так, что прямой a соответствует единственная прямая a' и наоборот. Такое отношение между пучками называется проективным отображением. С помощью своей системы Штейнер построил коническое сечение, точками которого были P и Q, а остальные точки определялись пересечениями гомологичных прямых в проективном отображении.





Тем не менее, применив проективное отображение, Штейнер не увязал полученные конические сечения с коническими сечениями, получаемыми при сечении конуса плоскостью. Система Штейнера обладала большим преимуществом: в ней можно было применить принцип двойственности, не прибегая к алгебраическим методам, так как полученные конические сечения можно было рассматривать как образованные пучками прямых или рядами точек в равной степени. Штейнер применил свой метод в том числе для доказательства теоремы, двойственной теореме Паскаля, формулировка которой начинается так: «Если мы рассмотрим шесть точек на коническом сечении точек...». Двойственная теорема начинается со слов: «Если мы рассмотрим шесть прямых на коническом сечении прямых...». В оставшейся части теоремы достаточно заменить «пересекаться в» на «лежать на».

Царская дорога

Геометрия Евклида, которой обучают в школах и даже на технических специальностях вузов, знакома нам больше всего, так как напрямую связана с повседневными явлениями окружающего нас мира. Однако она неудобна тем, что достаточно сложна. Проективная геометрия открыла новый путь, который позволил найти очень простые доказательства многих теорем и решить множество задач, которые в геометрии Евклида оказывались чересчур сложными. Феликс Клейн назвал проективную геометрию царской, то есть царицей всех геометрий. С другой стороны, одна геометрия вовсе не исключает другую, так как по своей структуре геометрия Евклида может считаться частным случаем проективной. Хотя проективная геометрия допускает синтетический подход, который имеет бóльшую образовательную ценность, она никогда не включалась в школьную программу, так как требует достаточно сложных рассуждений. Тем не менее, проективная геометрия принадлежит к числу разделов математики, которые отличаются наиболее широким практическим применением. Не следует забывать, что проективная геометрия стала наследницей начертательной геометрии и была создана из-за необходимости решения инженерных и архитектурных задач.

▲ *Изображение библейских строк «И отпустил Исаак Иакова» (Книга Бытия, глава 28, стих 5) из обширной серии мозаик, выполненных византийскими мастерами начиная с 1174 года для кафедрального собора Монреале (Сицилия).*

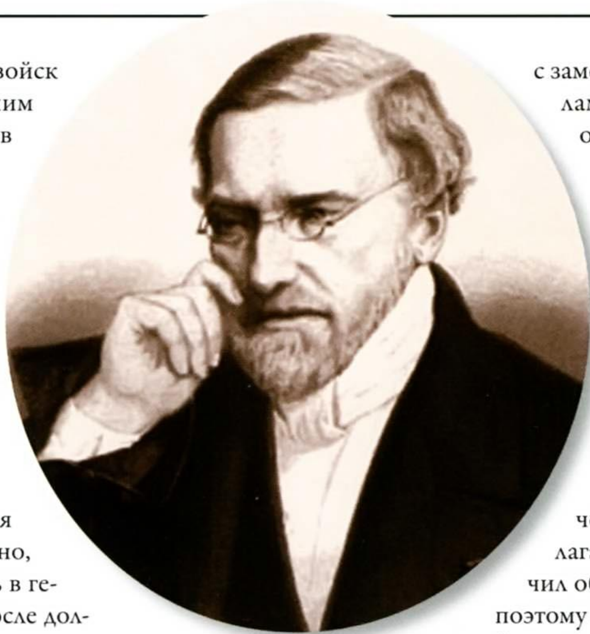
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- В книгах по проективной геометрии текст на многих страницах располагается в две колонки: в первой описывается некоторое утверждение, во второй — двойственное ему. Изобретателем этой формы записи был французский математик Жозеф Жергонн (1771–1859), который также ввел термины «полюс» и «принцип двойственности».
- Штейнер, который пренебрежительно называл мнимые точки проективной геометрии «привидениями» и «тенями геометрии», был настолько ярым сторонником синтетической геометрии, что во время лекций гасил свет в аудитории, чтобы его ученики могли лучше представить себе рассматриваемые фигуры.
- Блез Паскаль (1623–1662) сформулировал свою знаменитую теорему о конических сечениях, когда ему было всего 16 лет.
- Студенты-математики называют мнимые точки I и J Исаак и Якоб, при этом точное происхождение этих любопытных названий неизвестно.

Режим Наполеона, нуждавшийся в талантливых людях для решения административных задач, нашел в Жане Викторе Понселе своего верного и ценного слугу. Однако математику пришлось пожертвовать исследовательской работой, результаты которой могли бы иметь очень большое значение.

Создатель проективной геометрии

Жан Виктор Понселе



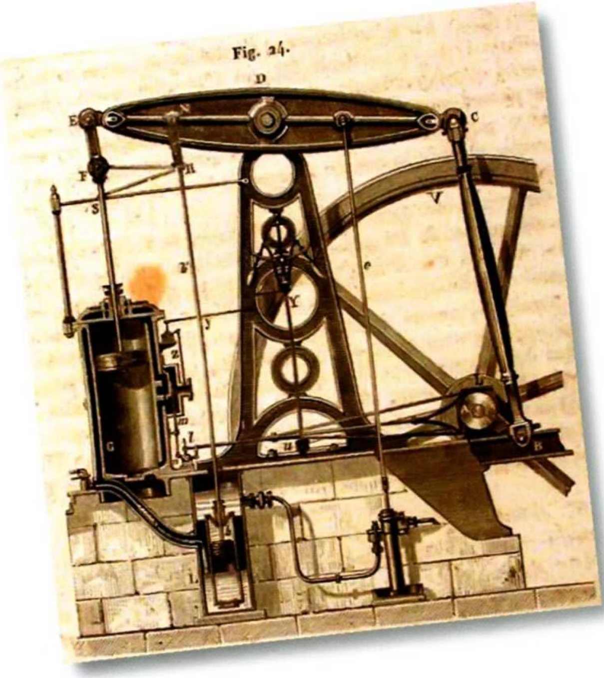
▲ *Жан Виктор Понселе, который вместе с Жозефом Диасом Жергонном (1771–1859) стал одним из создателей проективной геометрии, вел важную научную деятельность, которую ограничивали его многочисленные обязанности чиновника французского правительства.*

Отступление французских войск из Москвы считается одним из ужаснейших эпизодов в истории. Остатки Великой армии под командованием маршала Нея, одолеваемые голодом и холодом, потерпели еще одно поражение под Красным 18 ноября 1812 года. Мерзлые поля сражений были усеяны убитыми и ранеными, среди которых бойцы русского отряда обнаружили все еще дышавшего юношу. На его лохмотьях солдаты разглядели знаки отличия военного инженера; следовательно, пленного можно было направить в генеральный штаб для допроса. После долгого пятимесячного похода, в течение которого почти все пленные умерли, и после допроса в генеральном штабе юноша был заключен в тюрьму в Саратове. Этому юному инженеру, который благодаря удивительной силе и смелости смог перенести столько тягот, предстояло выдержать длительное тюремное заключение, которое продлилось два года. Чтобы сохранить ясность ума, он размышлял о математических теориях, которые изучил в школе военных инженеров в Меце. У него не было книг, и ему не удалось вспомнить ни один этап доказательств теорем, но, как он писал в мемуарах много лет спустя, он смог со всей четкостью вспомнить основы геометрии, которые ему преподавал выдающийся учитель — Гаспар Монж. Используя остатки угля в печи вместо мела, а стены камеры вместо доски, юноша начал создавать новую геометрию на основе начертательной геометрии, которую объяснил ему Монж.

Возвращение домой

Когда в сентябре 1814 года юноша был выпущен из тюрьмы и отправлен в Париж, он вез с собой семь книг, изготовленных из старой бумаги, с заметками, написанными угольными чернилами. Эти заметки стали основой книги, опубликованной в 1822 году под названием «Трактат о проективных свойствах фигур», которая дала начало одному из важнейших разделов математики — проективной геометрии. Этого 24-летнего юношу, который родился во французском городе Мец 1 июля 1788 года, звали Жан Виктор Понселе. Понселе окончил лицей в Меце и в 1807 году поступил в Политехническую школу. Именно там он прослушал курс лекций Монжа по начертательной геометрии. В Меце располагалась военная академия, и Понселе получил образование военного инженера; именно поэтому он участвовал в войне с Россией. Многие биографы полагают, что его научной карьере помешали многочисленные бюрократические обязательства, которые он должен был исполнять, будучи чиновником: им он посвящал почти все время в течение десяти лет, что провел в Меце. Так, ему пришлось заняться созданием Школы практической механики в Меце и реформой математического образования в Политехнической школе, объехать всю Францию с инспекцией фабрик по изготовлению хлопка, шелка и льна, а также готовить бесчисленные доклады об укреплениях для министерства обороны.

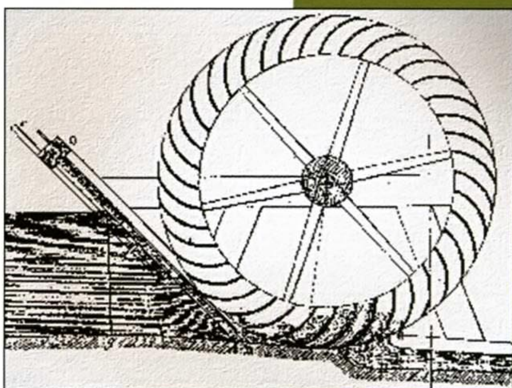
▶ *Чтобы преодолеть тяготы двухлетнего плена в России, куда он попал после ужасного отступления наполеоновских войск, Понселе, взяв за основу курс лекций Гаспара Монжа, начал создавать новую геометрию, которая получила название проективной геометрии.*



◄ *Понселе уделял одинаковое внимание развитию прикладной механики и теории машин и механизмов, что доказывает этот чертеж из его книги «Курс механики, примененной к машинам» (1874–1876). Основным вкладом Понселе в науку стал синтез математики, теоретических исследований и практических результатов. Он также проявил себя в образовании.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Творческие способности Понселе также проявились и в инженерном деле. В 1826 году он предложил улучшенный проект турбины, применив знания математики в гидродинамике и создав колеса, которые должны были вращаться под водой. В общем случае основным элементом турбины является ротор с лопастями, который приводится в движение водой подобно колесу водяной мельницы, за счет чего можно использовать механическую энергию колеса для движения. Либо, напротив, можно использовать механическую энергию воды, чтобы заставить вращаться ось, на которой находится ротор. Усовершенствование, предложенное Понселе, касалось формы лопастей ротора и представляло собой компромиссное решение: лопасти не только с силой загребали воду, но и не ударялись о поверхность воды благодаря особой форме. КПД турбины Понселе, по расчетам, должен был достигать 60 %. Несмотря на это, на постройку первой турбины по его проекту ушло почти 12 лет.
- Первая Всемирная выставка прошла в Лондоне в 1851 году. Понселе возглавлял французскую делегацию и отвечал за все вопросы, связанные с механикой.



► *Среди технических открытий Понселе выделяются усовершенствования многочисленных механизмов, например так называемое колесо Понселе: его КПД достигал 60 % по сравнению с 25 % у аналогичных механизмов, применявшихся до этого.*

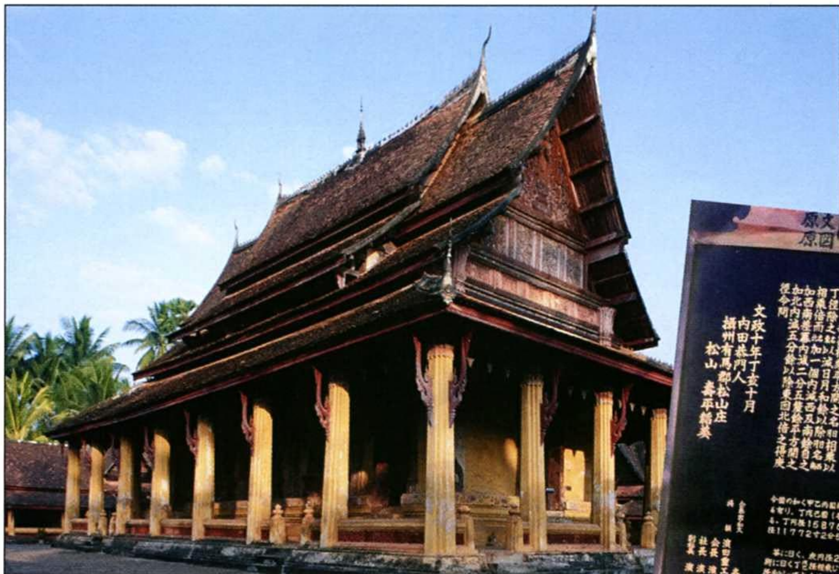
Научная карьера

В 1825 году Понселе начал преподавать механику в Мецской артиллерийско-инженерной школе. Именно во время работы в школе он мог отвлечься от насущных дел и заняться исследованиями, особое место среди которых занимали работы по повышению эффективности водяных мельниц. Понселе не был политиком, и ему было чуждо преклонение перед Второй французской империей, однако при исполнении различных государственных поручений ему неизбежно приходилось становиться частью политической игры. Возможно, это стало одной из причин, по которой он в течение трех лет отказывался сменить Лапласа на должности в Академии наук. С 1838 по 1848 год Понселе занимал пост профессора факультета наук Парижского университета, а с 1848 по 1850 год возглавлял Политехническую школу. Он умер в Париже 22 декабря 1867 года в возрасте 79 лет, сохранив совершенную ясность ума.

►*Среди новинок, представленных на первой Всемирной выставке, прошедшей в Лондоне в 1851 году, обращали на себя внимание сельскохозяйственные машины, приводимые в движение паром, которые изображены на рисунке.*

Сангаку, геометрические чертежи, выполненные на деревянных табличках, обладающие одинаково высокой художественной и математической ценностью, представляют собой исключительное проявление высочайшего культурного уровня, которого может достичь занимательная математика.

Сангаку
Японские математические таблички



◄ *Сангаку (внизу), что в буквальном переводе означает «математическая табличка», входили в число подношений, которые подвешивались к навесам крыш буддийских и синтоистских храмов средневековой Японии (слева). За их красотой и утонченностью скрывались удивительные геометрические задачи.*

▲ *Это сангаку, выполненное на деревянной табличке, датировано 86 годом нашей эры и хранится в храме Тагами в японской префектуре Фукуока. Табличка — прекрасный пример задач, которые записывали верующие на этих необычных подношениях. Чтобы решить задачи, записанные на табличках, требовались знания математики на уровне старших классов современной школы.*

В синтоистских и буддийских храмах средневековой Японии можно увидеть множество подношений в виде листов бумаги или деревянных табличек, подвешенных под крышей. На этих табличках изображены чудесные рисунки, показывающие, какого уровня достигло японское искусство тех времен. На некоторых из этих табличек нарисованы разноцветные геометрические фигуры. Треугольники, окружности, эллипсы и сферы, расположенные внутри друг друга, становились предметом замечательных геометрических задач. Эти таблички назывались сангаку, что в буквальном переводе означает «математическая табличка».

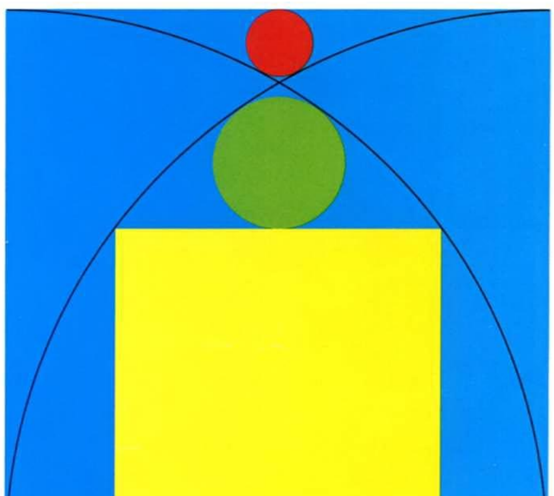
Математические задачи

Сангаку — это математическая задача, как правило геометрическая, записанная на деревянной табличке. Формулировка одного из простых сангаку, изображенного на рисунке справа, звучит так: длина стороны синего квадрата равна L. Чему равны радиусы красной и зеленой окружности и сторона желтого квадрата?

Для тех, кто попытается решить эту задачу, приведем ответ: радиус зеленой окружности равен 39/320 L, радиус красной окружности — L/16, сторона желтого квадрата — 3/5 L.

Табличка, на которой указывался только ответ к задаче, но не решение, колыхалась на ветру, прикрепленная к навесу крыши дома или храма, и словно безмолвно спрашивала всякого, кто проходил мимо: способен ли ты решить задачу?

Весьма вероятно, что некоторые учителя использовали эти таблички для преподавания математики в школах, но все указывает на то, что эти задачи носили исключительно занимательный характер. Их решали крестьяне, торговцы и самураи только ради удовольствия.



период наибольшей популярности сангаку пришелся на то самое время, когда Япония прочно закрыла свои границы и никакой возможности обмена знаниями с Западом не существовало.

Период Эдо

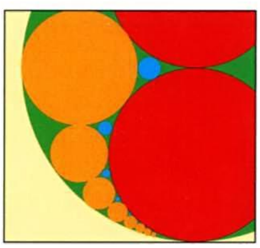
В начале XVII века в Японии стали появляться первые важные математические публикации, что совпало с периодом мира, который продолжался примерно два с половиной столетия. Ранее страну опустошали бесконечные войны между враждующими кланами, которые боролись за власть. Порядок был восстановлен сёгуном (он обладал высшей властью в государстве после императора) Токугавой Иэясу (1542–1616), который объединил и укрепил политику и экономику страны, пользуясь поддержкой императора. Столица была перенесена из Киото в Эдо — город, располагавшийся на месте современного Токио. С 1639 по 1854 год, когда Японией управлял клан Токугава, страна добровольно отгородилась от остального мира. Любые контакты с иностранцами и обмен знаниями с другими государствами оказались под запретом. В 1854 году при поддержке американских военно-морских сил правительство Японии было свергнуто, и период изоляции закончился, хотя официально датой конца периода Эдо считается 1867 год.

Как бы то ни было, этот период был отмечен ростом культуры, которую можно считать в чистом виде японской. Именно тогда своего наивысшего расцвета достигли театр Но, живопись Суми-Э и искусство икебаны. Бурное развитие переживала исконно японская математика, получившая название васан.

▲ *В работах знаменитого художника периода Эдо Китагавы Утамаро (1753–1806) не только изображены сцены из повседневной жизни простых людей, например праздник Нивака в Ёсиваре (см. иллюстрацию), но и точно передана атмосфера той эпохи.*

На сегодня удалось восстановить и классифицировать 825 сангаку, которые хранятся почти по всех префектурах Японии. Большинство задач с этих сангаку можно решить методами геометрии Евклида, которые изучают в средней школе. Однако некоторые из этих задач очень сложны и требуют использования современных математических методов, в частности анализа или аффинных преобразований. Несмотря на то, что сангаку, по всей видимости, содержали исключительно занимательные задачи, в них можно встретить некоторые важные математические теоремы.

Например, сангаку, представленное на рисунке ниже, где нужно выразить радиус n-го синего круга через радиус r зеленого круга, было найдено в 1788 году в префектуре Токио. Это сложная задача, которую подробно изучили Декарт и позднее Мальфатти. Эта задача привлекла внимание историков математики, так как



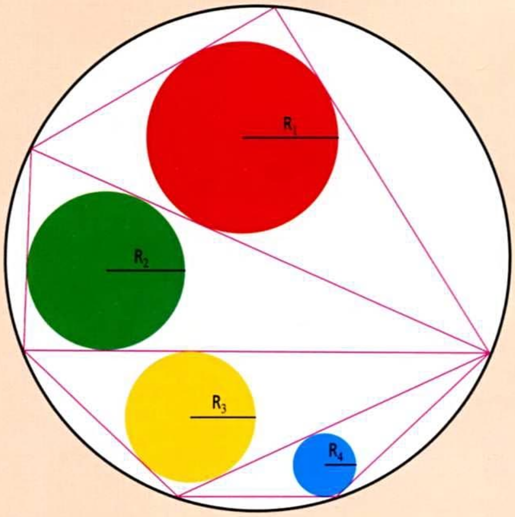
Слово «васан» в Японии обозначало японскую математику в противоположность западной (ёсан). Возможно, период наибольшего расцвета японской математики отмечен работами математика Секи (1642–1718), которого считают японским Лейбницем.

Именно он первым использовал мощную теорию определителей, которая широко применялась на практике. Работы Секи в области алгебры позволили японским математикам решать системы из трех уравнений с тремя неизвестными с помощью метода, очень похожего на тот, что был создан на Западе 200 лет спустя (метод Крамера). Одним из самых удивительных открытий Секи стал метод энри, которых был очень схож с древнегреческим методом исчерпывания и применялся для вычисления площади криволинейных поверхностей. В частности, его использовали, чтобы вычислить площадь круга при известных площадях вписанных и описанных правильных многоугольников. Отличие метода энри заключалось в том, что площадь круга вычислялась с помощью

Японские теоремы

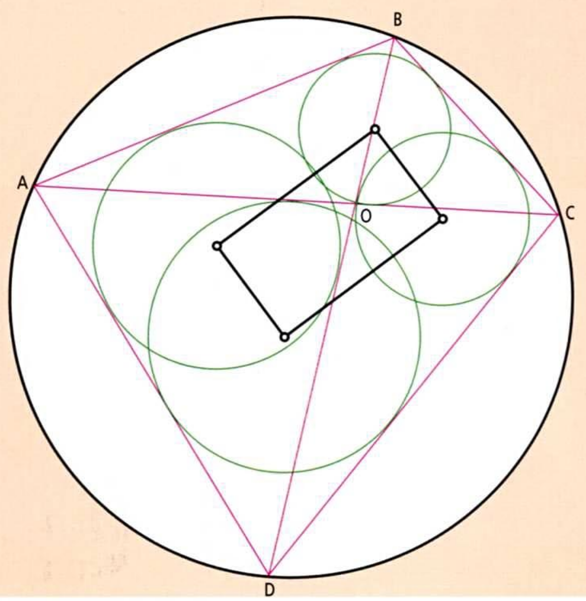
Из всех задач сангаку выделяются три теоремы, которые носят имена двух видных японских математиков — Ё. Миками и Т. Кобаяши. Эти теоремы известны под общим названием «японские теоремы».

В окружность вписан произвольный многоугольник с произвольным числом сторон. Из одной из его вершин были проведены все возможные диагонали к другим вершинам (на рисунке

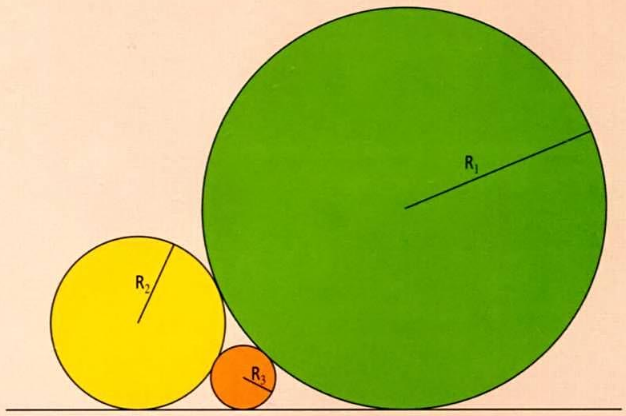


в качестве примера приведен шестиугольник). Образовался ряд треугольников (в нашем случае четыре). В каждый из этих треугольников была вписана окружность. Сумма радиусов этих окружностей всегда будет одинаковой вне зависимости от формы исходного многоугольника ($R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ = константа).

Вторая теорема гласит: если в произвольную окружность вписать четырехугольник ABCD и провести диагонали AC и BD, которые пересекутся в точке O, то центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, образуют прямоугольник вне зависимости от того, какую форму имел исходный четырехугольник.



Третья теорема записана на сангаку, обнаруженном в префектуре Гумма в 1824 году.



Три окружности касаются одной прямой, а также касаются друг друга, при этом $R_1 < R_2 < R_3$. Согласно теореме, всегда выполняется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}.$$

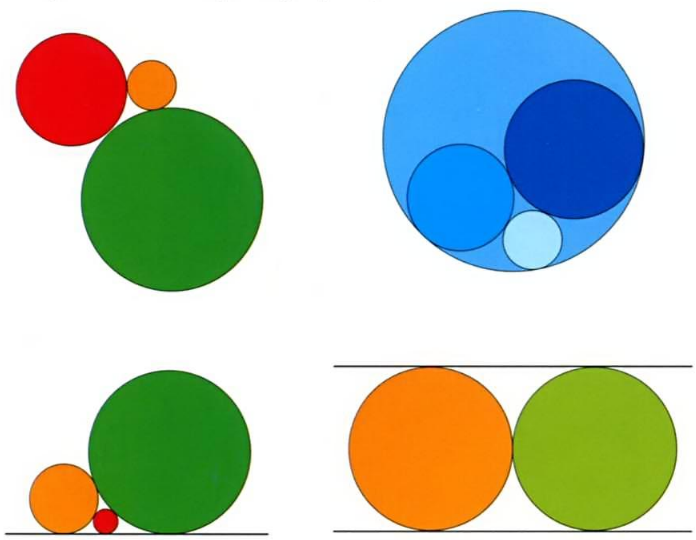
Первые две из этих теорем несколько сложны, и для их доказательства требуется использовать некоторые результаты высшей геометрии. Тем не менее, третью теорему можно доказать исключительно с помощью теоремы Пифагора и несложных геометрических рассуждений, поэтому мы приглашаем всех читателей попытаться сделать это.

прямоугольников. Этот метод обладал одним преимуществом: его можно было применить для произвольных кривых. Он был очень близок к понятию интеграла, которое позднее было введено в западной математике. Предполагается, что некоторые сложные задачи сангаку решались именно с помощью метода энри.

В этом сангаку, найденном в 1825 году, изображен цилиндр, касающийся сферы изнутри. В задаче требуется определить, какая часть площади цилиндра заключена внутри сферы. Считается, что для решения этой задачи требовалось использовать метод энри.

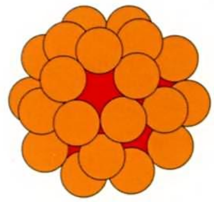
Ёсан

Три или четыре окружности, попарно касающиеся друг друга, иногда называют окружностями Декарта. Если определить кривизну окружности c как величину, обратную ее радиусу r ($c = 1/r$), то прямую можно интерпретировать как «вырожденную» окружность, которая имеет бесконечный радиус, и следовательно нулевую кривизну. В этих условиях следующие фигуры, которые можно встретить в некоторых сангаку, можно считать окружностями Декарта (хотя сам Декарт в своей теореме рассмотрел только окружности, изображенные на первом рисунке).



Так называемая теорема Декарта об окружностях, сформулированная Рене Декартом в письме к принцессе Елизавете Богемской в 1643 году, гласит: $(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2 = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$. В оригинальной формулировке приводится намного более сложная формула, правильность которой к тому же не была полностью доказана. Полное доказательство теоремы привел Якоб Штейнер в 1824 году. Позднее, в 1936 году Содди обобщил эту теорему для трехмерного пространства, в котором окружностям Декарта будут соответствовать n сфер, попарно касающихся друг друга.

На этом сангаку (внизу), датированном 1798 годом, нужно выразить радиус большой сферы через радиус любой из 30 окружающих ее сфер. Сложно представить, как можно решить эту задачу, не прибегая к методам Содди.



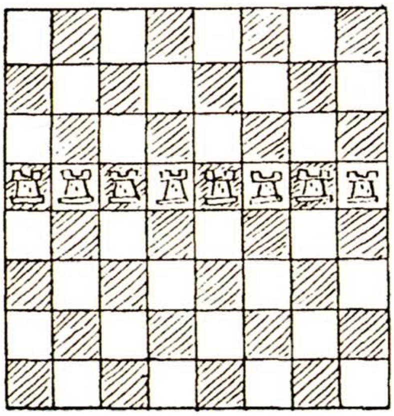
▲ *Такакуза Секи (1642–1718), также известный как Секи Кова, способствовал расцвету васан (японской математики) в противоположность ёсан (европейской математике). Его главным открытием стал так называемый метод энри, позволявший приближенно вычислять площади поверхностей с помощью правильных многоугольников.*

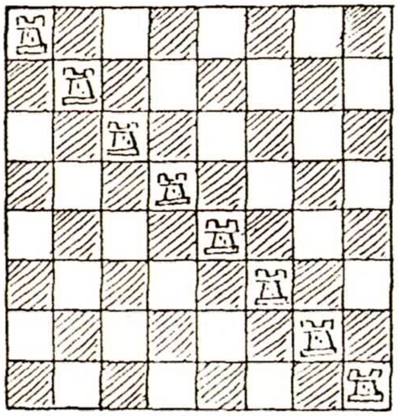
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Изоляция Японии в период Эдо была настолько строгой, что любое путешествие за границу вне зависимости от цели и продолжительности каралось смертной казнью.
- Сэр Фредерик Содди (1877–1956) в 1921 году был удостоен Нобелевской премии по химии за открытие изотопов. Его обобщение теоремы Декарта об окружностях было опубликовано в 1936 году в журнале Nature в форме стихотворения под названием The Kiss Precise, что можно перевести как «Точный поцелуй». Это название в некотором роде содержит отсылку к соприкасающимся окружностям (они рассматриваются в дифференциальной геометрии), а касание фигур сравнивается с поцелуем. В стихотворении Содди говорилось: «Четыре круга поцеловались, и чем меньше были они, тем они были «кривее», и их кривизна была всего лишь обратной расстоянию до центра».

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Задачи на шахматной доске





1. Задача о восьми ладьях

На рисунке слева вы можете видеть, что каждая клетка шахматной доски либо занята ладьей, либо находится под боем, а каждая ладья защищена другой ладьей (если бы на доске в том же порядке располагались белые и черные ладьи, мы сказали бы, что все они находятся под боем). Если расположить восемь ладей в любом столбце или любой строке, эффект будет аналогичным. На рисунке справа каждая клетка либо занята, либо находится под боем, но в этом случае ни одна ладья не защищена.

Сколькими способами можно расположить восемь ладей на доске так, чтобы каждая клетка была либо занята, либо находилась под боем и чтобы ни одна ладья не была защищена? Здесь я не хочу рассматривать проблему зеркальной симметрии, поэтому расположение ладей на разных диагоналях доски считается различным. Аналогично и для других расположений, полученных поворотом доски.

▲ *Сколькими способами можно расположить восемь ладей на доске так, чтобы каждая клетка была либо занята, либо находилась под боем и чтобы ни одна ладья не была защищена?*

2. Незащищенные слоны

Расположите минимально возможное число слонов на шахматной доске так, чтобы каждая клетка оказалась занята или находилась под боем. Вы увидите, что зона поражения ладьи больше, чем зона поражения слона. В какой бы клетке доски вы ни расположили ладью, под боем всегда будут находиться 14 клеток, в то время как под боем слона будут находиться 7, 9, 11 или 13 клеток в зависимости от того, на какой диагонали он расположен. Следует указать, что когда мы говорим о диагоналях шахматной доски, мы не ограничиваемся двумя большими диагоналями, идущими из угла в угол доски, а учитываем все малые диагонали, параллельные им. Рекомендуем читателю обратить внимание на этот момент, чтобы избежать недопонимания в следующих задачах.

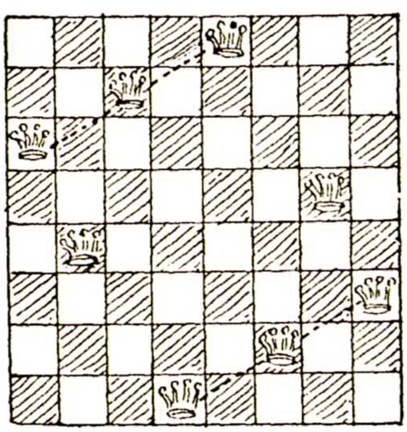
3. Защищенные слоны

Сколько слонов необходимо для того, чтобы каждая клетка доски была либо занята, либо находилась под боем, а каждый слон при этом был бы защищен другим слоном? Как расположить слонов, чтобы выполнить все условия задачи?

4. Восемь ферзей

Ферзь, несомненно, самая сильная шахматная фигура. Если расположить ферзя в одной из четырех центральных клеток доски, под боем окажутся 27 других клеток. Если расположить ферзя в углу доски, под боем окажется 21 клетка. Восемь ферзей можно расположить на доске так, что ни один не будет под боем другого. В старой задаче, впервые предложенной Ноком в 1850 году, которая подробно освещена в литературе, требуется указать, сколькими способами можно расположить восемь ферзей согласно этому условию.

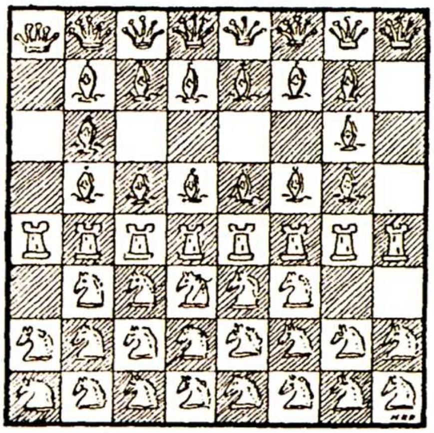
Один из возможных способов представлен на рисунке. Всего существует 12 принципиально различных способов расположения ферзей. На основе этих способов можно получить еще 92, если учитывать повороты и зеркальную симметрию отдельно. Представленное на рисунке расположение ферзей в некотором роде симметрично. Если вы перевернете страницу вверх ногами, рисунок не изменится, но если вы посмотрите на него под углом, расположение ферзей будет другим. Если затем вы посмотрите на оба расположения ферзей в зеркале, то увидите еще два новых. Остальные 11 решений несимметричны, следовательно, с помощью поворотов и зеркальной симметрии каждое из них можно представить восемью разными способами. По этой причине из 12 основных решений можно получить всего 92 решения, как мы уже указывали, а не 96, как было бы в случае, если бы ни одно из 12 исходных не было симметричным. При решении задач на шахматной доске нужно четко представлять себе повороты и зеркальную симметрию доски.



Сможет ли читатель расположить восемь ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не находился под боем другого и при этом никакие три ферзя не располагались бы на одной линии? Расположение ферзей, представленное на рисунке, не удовлетворяет условию задачи, так как на линиях, отмеченных точками, находится по три ферзя. Условию задачи удовлетворяет всего одно из 12 базовых решений. Сможете найти его?

5. Перенаселенная шахматная доска

В этой задаче нужно расставить на доске 51 шахматную фигуру так, чтобы ни один ферзь не находился под боем другого, ни одна ладья не находилась под боем другой, ни один слон не находился под боем другого и ни один конь не находился под боем другого. Расположение других



фигур не учитывается: считается, что два ферзя находятся под боем друг друга, даже если между ними расположены, например, ладья, слон и конь. Аналогично для слонов и ладей.

Найти решения для каждой фигуры по отдельности несложно. Трудности возникнут, когда вы попробуете найти место на доске для всех фигур одновременно.

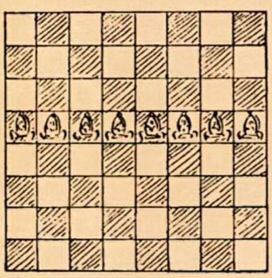
Решения

1. Очевидно, что в каждой строке и в каждом столбце должна находиться одна ладья. Начнем с верхней строки. Очевидно, что первую ладью можно поместить в любую из восьми клеток. Куда бы мы ни поместили первую ладью, вторую можно расположить в любой из семи клеток второй строки. Третью ладью можно расположить в любой из шести клеток третьей строки, четвертую — в любой из пяти клеток четвертой и так далее. Следовательно, общее число вариантов должно равняться $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \times 2 \times 1 = 40\,320$ (то есть 8 факториал, 8!). Это и есть правильный ответ.

Определить число решений без учета отражений и поворотов до сих пор никому не удалось: эта задача крайне сложна. Этот вопрос для шахматных досок меньшего размера мы рассмотрим в следующей задаче.

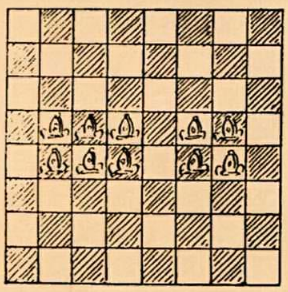
(Эту задачу в 1962 году одновременно и без помощи компьютера решили Дэвид Смит и Дональд Чарнли. Для доски размером 8×8 существует 5282 решения, для доски 9×9 — 46 066 решений. Для досок размерами от 2×2 до 7×7 существует 1, 2, 7, 23, 115 и 694 решения соответственно.)

2. Для решения этой задачи нужно как минимум восемь слонов. Самым простым решением будет расположить их в линию вдоль четвертой или пятой строки доски.



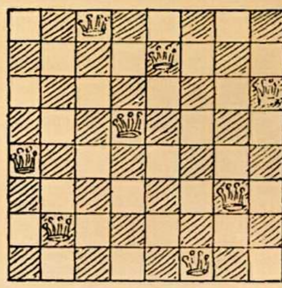
Однако читатель обратит внимание, что при таком расположении ни один слон не находится под защитой другого. Этот вопрос мы рассмотрим при объяснении решения следующей задачи.

3. Решить эту задачу очень просто, если сперва немного поразмыслить. Нужно рассмотреть только черные клетки доски. Любое расположение, верное для белых клеток, можно повторить и для черных, так как они взаимозаменяемы. Это возможно благодаря тому, что на шахматной доске четное число клеток — шестьдесят четыре. Если квадратная доска содержит нечетное число клеток, то на ней всегда будет на одну клетку одного цвета больше, чем другого.



Чтобы каждая клетка находилась под боем и каждый слон был защищен другим, потребуется 10 слонов. Один из вариантов решения представлен на рисунке. Обратите внимание, что два центральных слона в группе из шести слонов в левой части доски не играют никакой роли, они только защищают слонов в соседних клетках. Чтобы получить еще одно решение, передвиньте одного из двух упомянутых слонов на одну клетку вверх, другого — на одну клетку вниз.

4. Решение этой задачи представлено на рисунке. Как видите, ни один ферзь не находится под боем другого и никакие три ферзя не расположены на одной линии. Это единственное из 12 базовых расположений из восьми ферзей, не находящихся под боем друг друга, которое удовлетворяет последнему условию задачи.



5. Решение представлено на рисунке. На доске можно расположить не более восьми ферзей и восьми ладей так, чтобы они не находились под боем друг друга. Максимально возможное число слонов равно 14, коней — 32. Так как всех коней нужно поместить в клетки одного цвета, ферзи занимают по четыре клетки каждого цвета, а слоны — по семь, можно сделать вывод: расположить на доске согласно условиям задачи можно всего 21 коня.

Если решать эту задачу только для коней, то на клетках обоих цветов можно расположить больше чем 21 коня, однако на «перенаселенной» доске мне так и не удалось превзойти это число. Я считаю, что представленное мной решение содержит максимально возможное число фигур, но, возможно, какому-нибудь проницательному читателю удастся расположить на доске еще одного коня.

На первый взгляд, эта головоломка содержит сразу несколько невозможных ситуаций: шары не проходят в отверстия, а диски не пролезают в кольцо. Однако если выполнить правильную последовательность действий, произойдет чудо.

Головоломка с легендарной историей
«Освободи кольцо»

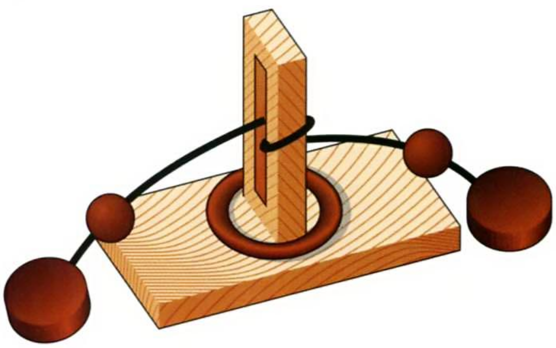
«Освободи кольцо» принадлежит к обширному семейству головоломок, которые похожи внешне и обладают схожими математическими свойствами. Происхождение этих головоломок и их названия неизвестны. Некоторые из этих головоломок, в которых нужно снять кольцо с веревки, имеют фантастические названия, например «Кольцо Нибелунгов» или «Кольцо Альбериха». Эти названия, очевидно, происходят из германской мифологии, столь распространенной в мире Вагнера, а также напоминают о кольце дочерей Рейна, которое появилось более чем за сто лет до Кольца Всевластья, придуманного Джоном Р. Р. Толкиеном.

▸ *Нужно запастись терпением, чтобы последовательно передвинуть части головоломки и освободить кольцо. Также нужно хорошо запомнить, как располагались элементы головоломки в самом начале, потому что далее мы будем называть их правыми и левыми.*

Суть головоломки

В этой головоломке нужно изменить относительное расположение ее элементов (кольца, шаров и веревки) так, чтобы освободить кольцо. Так как возможные перестановки частей головоломки (например, нельзя разрезать веревку или проделать отверстие в основании) описывает раздел математики, называемый топологией, эту головоломку можно назвать топологической.

Далее описывается начальное положение головоломки. Возможно, чтобы получить его, вам потребуется сначала распутать веревку.



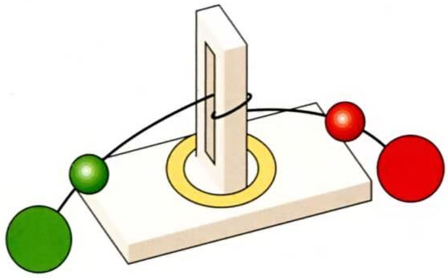
Кольцо лежит на основании головоломки. Извлечь его мешает веревка, которая проходит через отверстие в столбе и обернута вокруг него, а на каждом конце веревки привязано по одному шару и одному диску. Проясним обозначения, которые мы будем использовать далее. Расположим головоломку так, чтобы концы веревки находились слева и справа, как показано на рисунке.

Запомните, где располагались элементы головоломки, когда вы начали ее собирать: далее мы будем называть шары и диски левыми и правыми в зависимости от того, где они находились вначале.

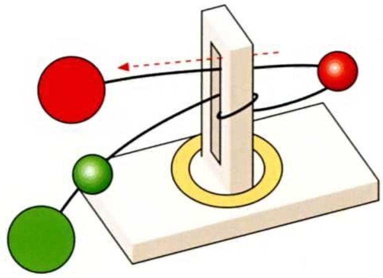
Заметьте, что диски проходят через отверстие в столбе, шары — нет. Шары, напротив, проходят сквозь кольцо, а диски — нет. При решении головоломки важно, чтобы ее элементы располагались точно так, как показано на следующих иллюстрациях.

Как освободить кольцо

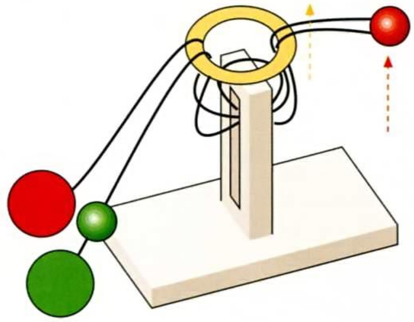
Расположите головоломку так, как показано на предыдущей странице. Ниже показано, какие действия нужно совершить, чтобы освободить кольцо.



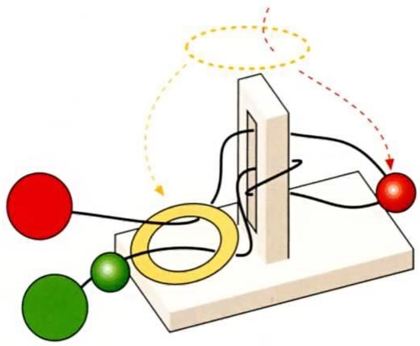
1. Исходное положение.



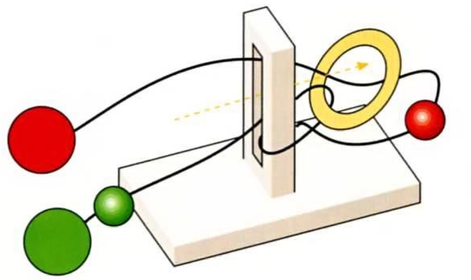
2. Проденьте правый диск через отверстие в столбе.



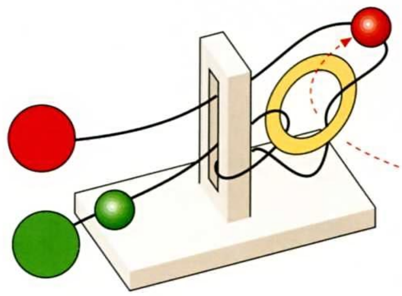
3. Для удобства поднимите веревку так, чтобы она оказалась обернута вокруг верхней части столба. Одновременно поднимите правый шар и кольцо над столбом.



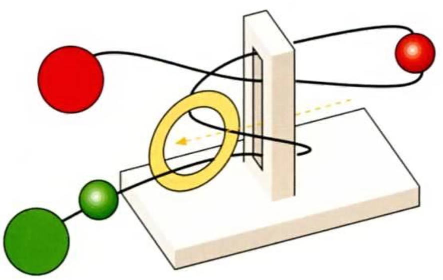
4. Проденьте шар в кольцо сверху вниз и положите кольцо на основание слева.



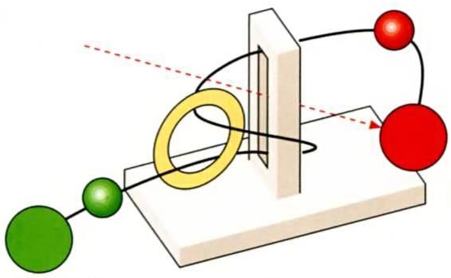
5. Проденьте кольцо через отверстие в столбе слева направо.



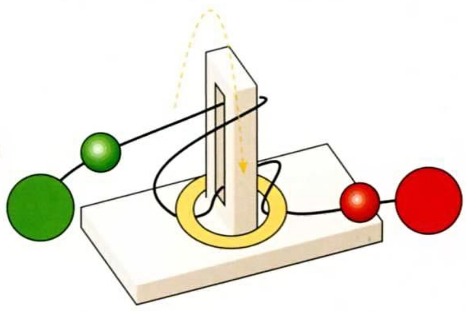
6. Проденьте шар через кольцо.



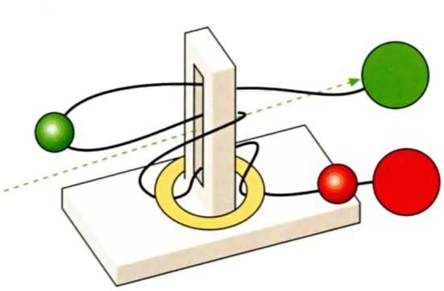
7. Снова проденьте кольцо через отверстие в столбе и вновь положите его слева.



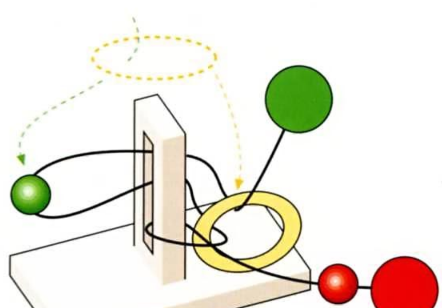
8. Проденьте правый диск через отверстие в столбе. Теперь концы веревки расположены как в начальной позиции.



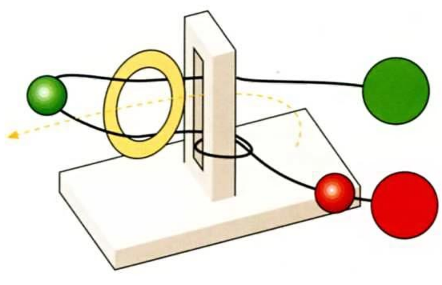
9. Снова проденьте кольцо через отверстие в столбе так, чтобы оно заняло исходное положение.



10. Теперь проденьте левый диск, выделенный зеленым цветом, через отверстие в столбе над кольцом.



11. Поднимите левый шар и кольцо и проденьте шар в кольцо, как показано на рисунках 3 и 4. В этот раз положите кольцо справа от столба.



12. Проденьте кольцо через отверстие справа налево. Проденьте левый шар в кольцо. Головоломка решена! Чтобы восстановить исходное положение, указанные действия нужно совершить в обратном порядке.


18 17 3
11 8 7 19
9 6 5 4 16
14 1 2 12
15 10
13

В следующем выпуске через 2 недели

Кубики в перспективе

Матрицы
Числа в строках и столбцах

Создатель инвариантов
Артур Кэли

Центральная предельная теорема
Статистический анализ и прогнозирование

Лучшее от Сэма Лойда
Часы и стенография

Спрашивайте в киосках!

16+